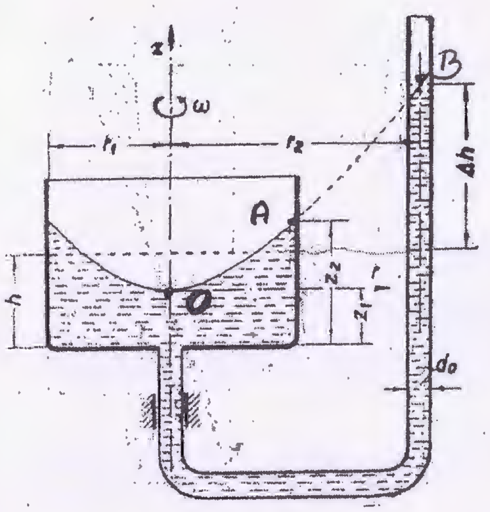
Prvi kolokvijum iz Mehanike fluida

(07.12.2018.)

1. **(9p)** Sud oblika kružnog cilindra poluprečnika r_1, napunjen tečnošću gustine ρ do visine h, vezan je kruto u U – cijev kružnog presjeka prečnika d_0. Sud se zajedno sa cijevi obrće oko vertikalne ose, koja se poklapa sa osom cilindra, konstantnom brzinom ω.

a) Odrediti u opštim brojevima zavisnost izmedju veličine Δh, za koju se tečnost podiže u sredini otvorenog kraka U – cijevi, čija je osa udaljena za r_2 od ose suda, i ugaone brzine ω kojom se sistem obrće.

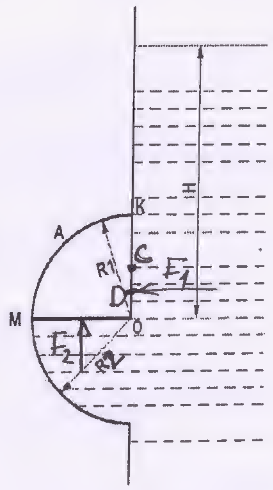
b) Sračunati Δh za sledeće brojne vrijednosti: r_1 = 100 mm, r_2 = 200 mm, d_0 = 20 mm, n = 80 o/min.



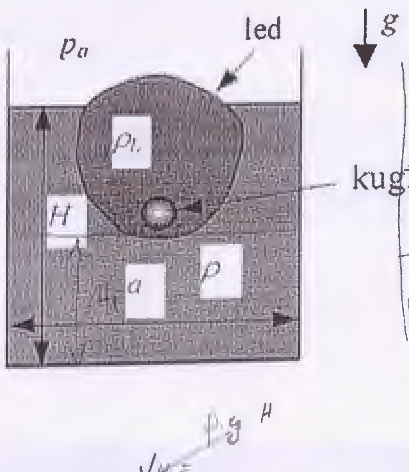
2. **(8p)** Uglasti bočni zatvarač zatvara bočni otvor u rezervoaru kao što je prikazano na slici. Poznata je dužina zatvarača B=1 m, poluprečnik R_1 = 1 m i R_2 = 1,2 m. Odrediti:

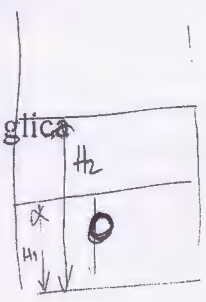
a) Do koje visine H se može nasuti voda u rezervoar, za slučaj da obrtni moment sila pritiska u odnosu na obrtnu osovinu O ne prelazi vrijenost 6000 Nm i

b) Pri kom poluprečniku R_2 će hidraulički moment sila pritiska vode na zatvarač biti jednak nuli?



3. **(7p)** U kockastoj posudi stranice a = 0,5 m napunjene vodom gustine ρ = 1000 kg/m³ do visine H = 0,42 m pliva komad leda gustine ρ_l = 917 kg/m³. Unutar leda zapremine V_l =12 dm³ se nalazi čelična kuglica zapremine V_k = 49 cm³ gustine ρ_k = 7800 kg/m³. Odrediti za koliko će se promijeniti nivo vode H kada se led otopi.





$\rho g \cdot V_k = \rho \cdot g\, H$

ρ_k.

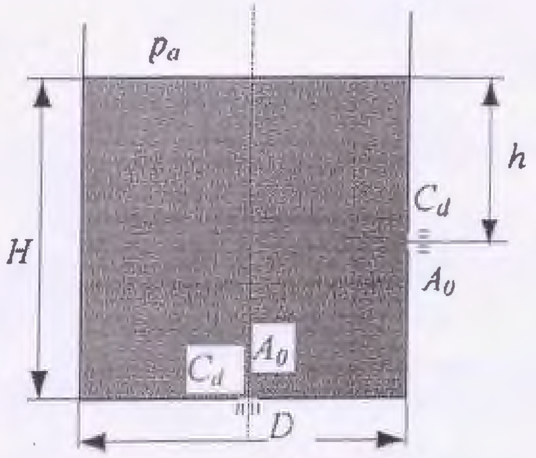
4. **(5p)** Za ravansko strujanje nestišljivog fluida brzina je data izrazom

$$\vec{\vartheta} = (2x^2+8xy - 2y^2)\,\vec{i} + (4x^2-4xy - 4y^2)\,\vec{j}.$$

a) Odrediti brzinu strujanja fluida i nagib strujnice u tački A (1,1)

b) Naći strujnu funkciju $\psi(x, y)$. Provjeriti da li je strujanje vrtložno i ako nije izračunati funkciju potencijala $\varphi(x, y)$.

5. **(6p)** Cilindrična posuda ima na dnu i na zidu dva jednaka otvora, svaki površine A_0 = 4,5 mm², i koeficijenta protoka φ = 0.82.



a) Izračunati vrijeme potrebno da se slobodna površina spušti za visinu h i to ako se posuda prazni kroz otvor na zidu.

b) Izračunati vrijeme potrebno da se slobodna površina spušti za visinu h i to ako se posuda prazni kroz oba otvora.

c) Izračunati vrijeme potrebno da se posuda potpuno isprazni ako se posuda prazni samo kroz otvor na dnu

d) Izračunati vrijeme potrebno da se posuda potpuno isprazni ako se prazni kroz oba otvora

$A_0 = 4{,}5\,mm^2 = 4{,}5\cdot 10^{-6}\,m^2$

$H = 0{,}4\,m$

$D = 0{,}33\,m$

$h = 0{,}18\,m$

Poznato je: H = 40 cm, D = 33 cm, h = 18 cm. $\vartheta = \varphi \cdot \sqrt{2gh}$.

Vidosava Vilotijević

В. Вилотијевић

Први колоквијум

из Механике флуида

$$\vec{F} + \vec{F_{in}} = \frac{1}{\rho} \, grad p / \cdot \vec{dl}$$

a) $(X + X_{in})dx + (Y + Y_{in})dy + (Z + Z_{in})dz = \frac{dp}{\rho}$

$X = 0$; $Y = 0$; $Z = -g$; $X_{in} = x\omega^2$; $Y_{in} = y\omega^2$; $Z_{in} = 0$

$$x\omega^2 dx + y\omega^2 dy - g dz = \frac{dp}{\rho} \; \Big/ \int$$

$$\frac{x^2}{2}\omega^2 + \frac{y^2}{2}\omega^2 - gz = \frac{p}{\rho} + C$$

$$\frac{r^2}{2}\omega^2 - gz = \frac{p}{\rho} + C$$

0: $r = 0$, $z = 0$, $p = p_b$

$$C = -\frac{p_b}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{r^2\omega^2}{2} - gz = \frac{p - p_b}{\rho}}$$ - једначина расподјеле притиска

* слободна површина суда: A: $(r = r_1 ; z = z_2 - z_1 ; p = p_b)$

$$\boxed{\frac{r_1^2\omega^2}{2} = g(z_2 - z_1)} \quad (1)$$

* слободна површина пијезо: B $(r = r_2 ; z = h + \Delta h - z_1 ; p = p_b)$

$$\boxed{\frac{r_2^2\omega^2}{2} = g(\Delta h + h - z_1)} \quad (2)$$

* једнакост запремина прије и послије обртања:

$$r_1^2\pi \cdot h = r_1^2\pi \cdot z_2 - \frac{r_1^2\pi}{2}(z_2 - z_1) + \frac{1}{4} d_0^2\pi \cdot \Delta h \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \Delta h + h - z_1 = \frac{r_2^2\omega^2}{2g} \Rightarrow z_1 = \Delta h + h - \frac{r_2^2\omega^2}{2g}$$

(1) $z_2 - z_1 = \frac{r_1^2\omega^2}{2g} \Rightarrow z_2 = \frac{r_1\omega^2}{2g} + z_1 = \frac{r_1^2\omega^2}{2g} + \Delta h + h - \frac{r_2^2\omega^2}{2g}$

$$z_2 = \frac{\omega^2}{2g}\left(r_1^2 - r_2^2\right) + \Delta h + h$$

(3) $\Rightarrow$ $r_1^2\pi \cdot h = r_1^2\pi\left(\frac{\omega^2}{2g}\left(r_1^2 - r_2^2\right) + \Delta h + h\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\omega^2}{2g}\left(r_1^2 - r_2^2\right) + \Delta h + h\right.$

$\left. - \Delta h - h + \frac{r_2^2\omega^2}{2g}\right) \cdot r_1^2\pi + \frac{1}{4}\frac{d_0^2}{r_1^2}\Delta h \Rightarrow$

$$\Delta h = \frac{-\frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{r_1^2}{2} - r_2^2\right)}{1 + \frac{1}{4}\frac{d_0^2}{r_1^2}}$$

b) $\omega = \frac{2\pi n}{60} = 8,37\ rad/s$

$r_1 = 100\ mm = 0,1\ m$

$r_2 = 0,2\ m$

$d_0 = 20\ mm = 0,02\ m$.

$$\Delta h = \frac{-\frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{r_1^2}{2} - r_2^2\right)}{1 + \frac{1}{4}\frac{d_0^2}{r_1^2}} \Rightarrow \boxed{\Delta h = 0,1237\ m}$$

② * први дио затварача

$F_1 = \rho g \cdot z_{c1} \cdot A_1$

$z_{c1} = H - \frac{R_1}{2} = H - \frac{1}{2}$

$A_1 = B \cdot R_1 = 1\ m^2$

$u_{c1} = z_{c1}$

$F_1 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(H - \frac{1}{2}\right) \cdot 1$

$\Delta u_c = \frac{I_{yc}}{u_c \cdot A_1} = \frac{1}{6(2H-1)}$

$F_1 = 9810H - 4905$

$\boxed{F_1 = 4905(2H-1)}$

$I_{yc} = \frac{B R_1^3}{12} = \frac{1}{2}$

* други дио затварача

$F_2 = \rho \cdot g \cdot z_{c2} \cdot A_2$

$z_{c2} = H$

$F_2 = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot H \cdot 1{,}2$

$A_2 = B \cdot R_2 = 1{,}2\,m^2$

$\boxed{F_2 = 11{,}772\,H}$

$M_0 = F_2 \cdot \frac{R_2}{2} - F_1 \cdot \left(\frac{R_1}{2} - \Delta u_c\right)$

$M_0 = F_2 \cdot \frac{R_2}{2} - F_1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6(2H-1)}\right)$

$M_0 = F_2 \cdot \frac{R_2}{2} - F_1 \cdot \left(\frac{6H-4}{6(2H-1)}\right)$

$6000 = 11772\,H \cdot 0{,}6 - 4905\cancel{(2H-1)}\left(\frac{6H-4}{6\cancel{(2H-1)}}\right)$

$6000 = 7063{,}2\,H - 4905 \cdot H + 3270$

$2158{,}2\,H = 2730 \Rightarrow \boxed{H = 1{,}265\,m}$

b) $M_0 = 0$

$F_1 \cdot X_1 = F_2 \cdot X_2$

x_1 – растојање од силе F_1 до тачке O

x_2 – растојање силе F_2 до тачке O

$4905\cancel{(2H-1)} \cdot \frac{6H-4}{6\cancel{(2H-1)}} = 9810 \cdot H \cdot R_2 \cdot \frac{R_2}{2}$

$4905\,H - 3270 = 4905\,R_2^2 \cdot H$

$\boxed{R_2 = 0{,}688\,m}$

(2) $a = 0{,}5\,m$

$\rho_V = 1000\ kg/m^3$

$H = 0{,}42\ m$

$\rho_L = 917\ kg/m^3$

$V_L = 12\ dm^3 = 12\cdot10^{-3}\ m^3$

$\rho_K = 7800\ kg/m^3$

$V_K = 49\ cm^3 = 49\cdot10^{-6}\ m^3$

$\Delta H = ?$

запремина дијела коцке леда који је у води

* равнотежна сила

$$G_L + G_K = F_{pot}$$

$$\rho_L\cdot g\cdot V_L + \rho_K\cdot g\cdot V_K + \rho_V\cdot g\cdot(V_{L1} + V_K)$$

$$V_{L1} + V_K = \frac{\rho_L\cdot V_L + \rho_K V_K}{\rho_V} \Rightarrow \boxed{V_{L1} = 0{,}0114\ m^3}$$

* масе леда прије и након топљења морају бити исте, па имамо:

$$\rho_L\cdot V_L = \rho_V\cdot V_{L2}$$ запремина оне воде настале топљењем леда

$$V_{L2} = \frac{\rho_L\cdot V_L}{\rho_V} = 0{,}011\ m^3$$

* једнакост запремина прије и послије топљења леда:

$$\cancel{\underbrace{a^2 H - V_K - V_{L1}}_{a^2\cdot H_1} = a^2(H_1 + \Delta H) - V_K - V_{L2}}$$

$$\underbrace{a^2\cdot H - V_K - \cancel{V_{L1}}} = a^2(H_1 + \Delta H) - \cancel{V_{L1}} - V_K - V_{L2}$$

$$a^2\cdot H_1 = a^2(H_1 + \Delta H) - V_K - V_{L2}$$

$$V_{L2} + V_K = a^2\Delta H$$

$$\Delta H = \frac{V_{L2} - V_K}{a^2} = [\quad\quad]\ m.$$

1) $\vec{v} = (2x^2 + 8xy - 2y^2)\vec{i} + (4x^2 - 4xy - 4y^2)\vec{j}$

a) $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v_x = 2x^2 + 8xy - 2y^2$

$v_y = 4x^2 - 4xy - 4y^2$

За $A(1,1)$ $v_x = 8\ m/s$

$v_y = -4\ m/s$

$v = \sqrt{8^2 + (4)^2} = \sqrt{80} = 8{,}94\ m/s$

$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{1}{2}$

b) $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

$\partial\psi = (2x^2 + 8xy - 2y^2)\,dy \;/\int$

$\psi = 2x^2y + 4xy^2 - \frac{2}{3}y^3 + f(x)$

$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 4xy + 4y^2 + f'(x) = -4x^2 + 4xy + 4y^2$

$f'(x) = -4x^2$

$f(x) = -\frac{4}{3}x^3 + C$

$$\boxed{\psi = 2x^2y + 4xy^2 - \frac{2}{3}y^3 - \frac{4}{3}x^3 + C}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{k} = \frac{1}{2}(8x - 4y - 8x + 4y) = 0$$

– струјање није вртложно

$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow \partial\varphi = (2x^2 + 8xy - 2y^2)\,dx \;/\int$

$\varphi = \frac{2x^3}{3} + 4x^2y - 2xy^2 + f(y)$

$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 4x^2 - 4xy + f'(y) = 4x^2 - 4xy - 4y^2$

$f'(y) = -4y^2$

$f(y) = -\frac{4}{3}y^3 + C$

$$\boxed{\varphi = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2y - 2xy^2 - \frac{4}{3}y^3 + C}$$

5.

a) $$\frac{dM_K}{dt} + \int_{A_K} \rho (\vec{v}\, dA) = 0$$

$$\rho \cdot A \frac{dh}{dt} + \cancel{h A \frac{d\rho}{dt}}^{\,0} + \rho v A_0 = 0$$

$$A \frac{dh}{dt} = - v A_0$$

$$dt = - \frac{A}{v \cdot A_0}\, dh$$

$$dt = \frac{-A}{A_0 \cdot \rho \cdot \sqrt{2gh}}\, dh \;\Big/ \int$$

$$t_1 = - \frac{A}{A_0 \cdot \ell \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_H^{H-h} \frac{1}{\sqrt{h}}\, dh$$

$$t_1 = \frac{A}{A_0 \cdot \ell \sqrt{2g}} \int_{H-h}^{H} \frac{dh}{\sqrt{H}}$$

$$t_1 = \frac{\frac{D^2 \pi}{4}}{A_0 \cdot \rho \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{h} \Big|_{H-h}^{H}$$

$$t_1 = \boxed{}\ s$$

б) Пошто је површина оба отвора једнака, закључујемо се да ће ~~и~~ вријеме за које ће слободна површина да се спусти за висину h кад ~~нам~~ вода истиче кроз оба отвора бити два пута мање него кад вода истиче кроз један од њих.

$$t_2 = \frac{t_1}{2} = \quad \underline{s}$$

c) $$\rho A \frac{dh}{dt} = - \rho v_0 A_0$$

$$t_3 = \frac{-A}{A_0 \cdot \rho \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$t_3 = \boxed{}\ s$$

д) Посуда се до висине h празни за време t_2, а затим се до краја празни само кроз отвор на дну.

$$t_4 = \frac{A}{A_0 \cdot \varphi\sqrt{2g}} \int_0^{H-h} \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$t_4 =$ ______ s

$$\boxed{t_5 = t_2 + t_4}$$